Name: **Datum:**

Ebenen in Parameterform - Ebene aus einem Punkt und zwei freien Vektoren - Grundwissen

Wie bestimmt man die Gleichung einer Ebene E in Parameterform, wenn diese

- durch einen Punkt P verlaufen und
- von einem freier Vektor $\vec{u}$ und
- von einem freien Vektor $\vec{v}$ aufgespannt werden soll?

1. Setze den zum Punkt P zugehöriger Ortsvektor $\vec{p}$ als Stützvektor der Ebene.
2. Setze den freien Vektor $\vec{u}$ als einen Spannvektor der Ebene.
3. Setze den freien Vektor $\vec{v}$ als anderen Spannvektor der Ebene.

Dann lautet die Gleichung der Ebene E in Parameterform $E:\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$.

Beispiele: **1.** Gegeben sind der Punkt $P(1\,|\,3\,|\,-2)$ und die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, auf der der Punkt P liegt und die von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zum Punkt P gehörigen Ortsvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$,

als Spannvektoren die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$.

2. Gegeben sind die Ebene $F:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ und der Punkt $P(2\,|\,11\,|\,-3)$,

der <u>nicht auf der Ebene</u> F liegt.
Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, die parallel zur Ebene F verläuft und auf der der Punkt P liegt.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zum Punkt P gehörigen Ortsvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}2\\11\\-3\end{pmatrix}$,

als Spannvektoren die Spannvektoren $\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$ der Ebene F.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\11\\-3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\6\end{pmatrix}$.

Beispiele: 3. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, <u>die sich</u> im Punkt $S(2\,|\,2\,|\,-3)$ <u>schneiden</u>.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, in der beide Geraden liegen.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zum Punkt S gehörigen Ortsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, als Spannvektoren die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Geraden.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, die <u>windschief</u> sind.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, in der die Gerade g liegt und zu der die Gerade h parallel liegt.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zum Stützpunkt der Geraden g gehörigen Ortsvektor $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, als Spannvektoren die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.