Name: **Datum:**

Ebenen in Parameterform - Ebene aus zwei Punkten und einem Richtungsvektor - Grundwissen

Wie bestimmt man die Gleichung einer Ebene E in Parameterform, wenn diese

- durch einen Punkt P verlaufen und
- durch einen Punkt Q verlaufen und
- als einen Spannvektor den freien Vektor $\vec{v}$ (der nicht in Richtung des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ verläuft) haben soll?

1. Setze den zum Punkt P zugehöriger Ortsvektor $\vec{p}$ als Stützvektor der Ebene.
2. Berechne den freien Vektor $\vec{u}=\vec{q}-\vec{p}$ (möglich ist auch $\vec{u}=\vec{p}-\vec{q}$) und setze diesen freien Vektor $\vec{u}$ als einen Spannvektor der Ebene.
3. Setze den freien Vektor $\vec{u}$ als anderen Spannvektor der Ebene.

Dann lautet die Gleichung der Ebene E in Parameterform $E:\vec{x}=\vec{p}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$.

Beispiele: **1.** Gegeben sind die Punkte $P(1\,|\,3\,|\,-2)$ und $Q(3\,|\,7\,|\,5)$ und der Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}$.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, auf der die Punkte P und Q liegen und die den Vektor $\vec{v}$ als Spannvektor hat.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zum Punkt P gehörigen Ortsvektor $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$,

Dann berechnet man $\vec{u}=\vec{q}-\vec{p}=\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1\\7-3\\5-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$ und nimmt diesen Vektor als einen Spannvektor der Ebene.

Als anderen Spannvektor der Ebene nimmt man den Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}$.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\10\\-7\end{pmatrix}$.

Name: **Datum:**

Ebenen in Parameterform - Ebene aus zwei Punkten und einem Richtungsvektor - Grundwissen

Beispiele: **2.** Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(1|-3|-3)$, der <u>nicht auf der Geraden liegt</u>.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, in der der Punkt P und die Gerade g liegen.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zum Punkt P gehörigen Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$,

Dann berechnet man den freien Vektor $\vec{u}$, der vom Punkt P zum Stützpunkt A der Geraden g verläuft, durch $\vec{u} = \vec{a} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-(-3) \\ -3-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und nimmt diesen Vektor als einen Spannvektor der Ebene.

Als anderen Spannvektor der Ebene nimmt man den Richtungsvektor der Geraden g $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Gleichung der Ebene E lautet dann $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, die <u>parallel zueinander</u> liegen.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, in der die beiden Geraden g und h liegen.

Lösung: Als Stützvektor nimmt man den zu einer der beiden Stützpunkte der Geraden gehörigen Ortsvektor, z.B. $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dann berechnet man den freien Vektor $\vec{u}$, der vom Stützpunkt A_1 der Geraden g zum Stützpunkt A_2 der Geraden h verläuft, durch $\vec{u} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-(-1) \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und nimmt diesen Vektor als einen Spannvektor der Ebene.

Als anderen Spannvektor der Ebene nimmt man den Richtungsvektor einer der beiden Geraden, z.B. $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

