

Ebenen in Parameterform - Ebene aus drei Punkten - Grundwissen

Wie bestimmt man die Gleichung einer Ebene E in Parameterform, wenn diese

- durch einen Punkt P und
- durch einen Punkt Q und
- durch einen Punkt R (die nicht auf einer Geraden liegen) verlaufen soll?

1. Setze den zu einem der drei Punkte, z.B. zum Punkt P (möglich ist auch den zum Punkt Q oder den zum Punkt R) zugehöriger Ortsvektor \vec{p} als Stützvektor der Ebene.
2. Berechne den freien Vektor $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$ (möglich ist auch $\vec{u} = \vec{p} - \vec{q}$) und setze diesen freien Vektor \vec{u} als einen Spannvektor der Ebene.
3. Berechne den freien Vektor $\vec{v} = \vec{r} - \vec{p}$ (möglich ist auch $\vec{v} = \vec{p} - \vec{r}$) und setze diesen freien Vektor \vec{v} als anderen Spannvektor der Ebene.

Dann lautet die Gleichung der Ebene E in Parameterform $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

Beispiel: Gegeben sind die Punkte $P(1|3|-2)$, $Q(3|7|5)$ und $R(2|1|4)$, die nicht auf einer Geraden liegen.

Gesucht ist die Gleichung der Ebene E in Parameterform, auf der die drei Punkte liegen.

Lösung:

Die drei Punkte werden beschrieben durch die Ortsvektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Als Stützvektor nimmt man z.B. $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Dann berechnet man $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 7-3 \\ 5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und nimmt diesen Vektor als einen Spannvektor der Ebene.

Dann berechnet man $\vec{v} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-3 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und nimmt diesen Vektor als anderen Spannvektor der Ebene.

Die Gleichung der Ebene E lautet dann: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.