Name: **Datum:**

Lineare Gleichungssysteme - 3 Gleichungen mit 3 Variablen - Grundwissen für TR

Ein **Lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen und 3 Variablen** (hier den Variablen r, s und t), hat vor dem Vereinfachen mit Hilfe des Taschenrechners im Allgemeinen die Form

$$\begin{array}{llll} a_{11}\cdot r & +a_{12}\cdot s & +a_{13}\cdot t & = b_1 \\ a_{21}\cdot r & +a_{22}\cdot s & +a_{23}\cdot t & = b_2 \\ a_{31}\cdot r & +a_{32}\cdot s & +a_{33}\cdot t & = b_3 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } a_{11} \neq 0\,;\, a_{12},\ldots,a_{33}, b_1, b_2, b_3 \text{ beliebig}.$$

Man spricht hier von einem 3x4-System mit 3 Zeilen und 4 Spalten.

Nach dem Vereinfachen hat das LGS üblicherweise eine der folgenden drei Formen:

1. Fall:

$$\begin{array}{llll} 1\cdot r & & & = 0 \\ & 1\cdot s & +\hat{a}_{23}\cdot t & = 0 \\ & & 0 & = 1 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{a}_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die dritte Gleichung ist eine falsche Aussage; kann also durch keine Einsetzung in eine wahre Aussage überführt werden.

Das LGS hat also **keine Lösung**: $L = \{\ \}$

2. Fall:

$$\begin{array}{llll} 1\cdot r & & & = c_1 \\ & 1\cdot s & & = c_2 \\ & & 1\cdot t & = c_3 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{bmatrix} \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \text{ beliebig}.$$

Alle drei Gleichungen werden durch die Einsetzungen $r = c_1$, $s = c_2$ und $t = c_3$ in wahre Aussagen überführt.

Das LGS hat also **eine eindeutige Lösung**: $L = \{(c_1 \mid c_2 \mid c_3)\}$

3. Fall:

$$\begin{array}{llll} 1\cdot r & & +\hat{a}_{13}\cdot t & = c_1 \\ & 1\cdot s & +\hat{a}_{23}\cdot t & = c_2 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \hat{a}_{13} & c_1 \\ 0 & 1 & \hat{a}_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{a}_{13}, \hat{a}_{23}, c_1, c_2 \text{ bel.}$$

Die letzte Gleichung ist eine wahre Aussage, die ersten beiden Gleichung werden durch die Einsetzung eines beliebigen t und dazugehöriger $s = -\hat{a}_{23}\cdot t + c_2$ und $r = -\hat{a}_{13}\cdot t + c_1$ in wahre Aussagen überführt.

Das LGS hat also **unendliche viele Lösungen** der Form

$$L = \{(r \mid s \mid t) \mid t \text{ beliebig}, r = -\hat{a}_{13}\cdot t + c_1 \text{ und } s = -\hat{a}_{23}\cdot t + c_2\}$$