Name: **Datum:**

Lineare Gleichungssysteme - 3 Gleichungen mit 2 Variablen - Grundwissen für TR

Ein **Lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen und 2 Variablen** (hier den Variablen r und s), hat vor dem Vereinfachen mit Hilfe des Taschenrechners im Allgemeinen die Form

$$\begin{array}{llcl} a_{11}\cdot r & +a_{12}\cdot s & = & b_1 \\ a_{21}\cdot r & +a_{22}\cdot s & = & b_2 \\ a_{31}\cdot r & +a_{32}\cdot s & = & b_3 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } a_{11} \neq 0\,;\, a_{12},\ldots,a_{32},b_1,b_2,b_3 \text{ beliebig}.$$

Man spricht hier von einem 3x3-System mit 3 Zeilen und 3 Spalten.

Nach dem Vereinfachen hat das LGS üblicherweise eine der folgenden drei Formen:

1. Fall:

$$\begin{array}{llcl} 1\cdot r & & = & 0 \\ & 1\cdot s & = & 0 \\ & 0 & = & 1 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ oder}$$

$$\begin{array}{llcl} 1\cdot r & +\hat{a}_{12}\cdot s & = & 0 \\ & 0 & = & 1 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & \hat{a}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \hat{a}_{12} \text{ beliebig}.$$

Jeweils eine Gleichung ist eine falsche Aussage; kann also durch keine Einsetzung in eine wahre Aussage überführt werden.

Das LGS hat also **keine Lösung**: $L = \{\ \}$

2. Fall:

$$\begin{array}{llcl} 1\cdot r & & = & c_1 \\ & 1\cdot s & = & c_2 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \text{ beliebig}.$$

Die letzte Gleichung ist stets eine wahre Aussage, die ersten beiden Gleichungen werden durch die Einsetzungen $r = c_1$ bzw. $s = c_2$ in wahre Aussagen überführt.

Das LGS hat also **eine eindeutige Lösung**: $L = \{(c_1 \mid c_2)\}$

3. Fall:

$$\begin{array}{llcl} 1\cdot r & +\hat{a}_{12}\cdot s & = & c_1 \\ & 0 & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & \hat{a}_{12} & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \hat{a}_{12}, c_1 \text{ beliebig}.$$

Die letzten beiden Gleichungen sind wahre Aussagen, die erste Gleichung wird durch die Einsetzung eines beliebigen s und eines dazugehörigen $r = -\hat{a}_{12}\cdot s + c_1$ in eine wahre Aussage überführt.

Das LGS hat also **unendliche viele Lösungen** der Form

$$L = \{(r \mid s) \mid s \text{ beliebig},\ r = -\hat{a}_{12}\cdot s + c_1\}$$

