Name: **Datum:**

Lineare Gleichungssysteme - 3 Gleichungen mit 4 Variablen - Grundwissen für TR

Ein **Lineares Gleichungssystem (LGS) mit 3 Gleichungen und 4 Variablen** (hier den Variablen r, s, t und u), hat vor dem Vereinfachen mit Hilfe des Taschenrechners im Allgemeinen die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot r & +a_{12}\cdot s & +a_{13}\cdot t & +a_{14}\cdot u & = & b_1 \\ a_{21}\cdot r & +a_{22}\cdot s & +a_{23}\cdot t & +a_{24}\cdot u & = & b_2 \\ a_{31}\cdot r & +a_{32}\cdot s & +a_{33}\cdot t & +a_{34}\cdot u & = & b_3 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } a_{11} \neq 0\,;\, a_{12},\ldots,a_{34}, b_1, b_2, b_3 \text{ beliebig}.$$

Man spricht hier von einem 3x5-System mit 3 Zeilen und 5 Spalten.

Nach dem Vereinfachen hat das LGS üblicherweise eine der folgenden drei Formen:

1. Fall:

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot r & & +\hat{a}_{13}\cdot t & +\hat{a}_{14}\cdot u & = & 0 \\ & 1\cdot s & +\hat{a}_{23}\cdot t & +\hat{a}_{24}\cdot u & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \hat{a}_{13} & \hat{a}_{14} & 0 \\ 0 & 1 & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Die dritte Gleichung ist eine falsche Aussage; kann also durch keine Einsetzung in eine wahre Aussage überführt werden.

Das LGS hat also **keine Lösung**: $L = \{\ \}$

2. Fall:

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot r & & & +\hat{a}_{14}\cdot u & = & c_1 \\ & 1\cdot s & & +\hat{a}_{24}\cdot u & = & c_2 \\ & & 1\cdot t & +\hat{a}_{34}\cdot u & = & c_3 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \hat{a}_{14} & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \hat{a}_{24} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{a}_{34} & c_3 \end{bmatrix} \text{ mit}$$

c_1, c_2, c_3 beliebig .

Alle drei Gleichungen werden durch die Einsetzung <u>eines beliebigen u</u> und dazugehöriger $t = -\hat{a}_{34}\cdot u + c_3$, $s = -\hat{a}_{24}\cdot u + c_2$ und $r = -\hat{a}_{14}\cdot u + c_1$ in wahre Aussagen überführt.

Das LGS hat also **unendlich viele Lösungen** der Form

$$L = \{(r\,|\,s\,|\,t\,|\,u)\,|\,\underline{u \text{ beliebig}}\,,\ r = -\hat{a}_{14}\cdot u + c_1\,,\ s = -\hat{a}_{24}\cdot u + c_2 \text{ und } t = -\hat{a}_{34}\cdot u + c_3\}$$

3. Fall:

$$\begin{array}{ccccccc} 1\cdot r & & +\hat{a}_{13}\cdot t & +\hat{a}_{14}\cdot u & = & c_1 \\ & 1\cdot s & +\hat{a}_{23}\cdot t & +\hat{a}_{24}\cdot u & = & c_2 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array} \text{ bzw. } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \hat{a}_{13} & \hat{a}_{14} & c_1 \\ 0 & 1 & \hat{a}_{23} & \hat{a}_{24} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{a}_{13}, \hat{a}_{23}, c_1, c_2$ bel.

Die letzte Gleichung ist eine wahre Aussage, die ersten beiden Gleichung werden durch die Einsetzung <u>eines beliebigen u und eines beliebigen t</u> sowie dazugehöriger $s = -\hat{a}_{23}\cdot t - \hat{a}_{24}\cdot u + c_2$ und $r = -\hat{a}_{13}\cdot t - \hat{a}_{14}\cdot u + c_1$ in wahre Aussagen überführt.

Das LGS hat also **unendliche viele Lösungen** der Form

$$L = \{(r\,|\,s\,|\,t\,|\,u)\,|\,\underline{u, t \text{ beliebig}}\,,\ r = -\hat{a}_{13}\cdot t - \hat{a}_{14}\cdot u + c_1 \text{ und } s = -\hat{a}_{23}\cdot t - \hat{a}_{24}\cdot u + c_2\}$$